引文格式:段新桥.地形曲面上测地距离的插值研究[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(5):1006-1016.DOI:10.13203/j.whugis20240319

Citation: DUAN Xinqiao. Topographic Surface Interpolation with Geodesic Distance[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(5):1006-1016.DOI:10.13203/j.whugis20240319

地形曲面上测地距离的插值研究

段新桥[1,2,3]

1 东华理工大学测绘与空间信息工程学院,江西 南昌,330013

2 资源与环境信息系统国家重点实验室,北京,100101

3 自然资源部环鄱阳湖区域矿山环境监测与治理重点实验室,江西 南昌,330013

摘 要:地球表面是个地形起伏的非欧氏空间,地图投影将大尺度的地球椭球面转换为容易分析计算的欧氏平面,但没有处理地形的不规则起伏。由于基本的表面距离不能量算,地形曲面上的空间分析广泛依靠近似计算,损害了地形模型的利用精度。在起伏明显的中小尺度地形上引入精确的测地距离,对密切依赖于空间距离的表面插值模型的度量改正方法及精度变化进行了研究。首先针对非欧氏度量引起的自相关矩阵非正定,提出测地距离限制的降维投影的解决办法,并以此改写主要插值算法;然后在一个10 m级水平分辨率地形格网上,选择较少受环境干扰的高程插值建立基准实验,再以优选模型分别对0.3 m级地形点云和0.25°级欧洲中长期预报再分析数据地表气温进行插值检验,探讨测地距离的适用尺度。结果发现,测地距离下反距离权重与自然邻近插值精度较欧氏距离都有明显提升;径向基函数与普通克里金插值精度在欧氏距离下普遍较简单插值要好,在降维投影的测地距离上,其均方误差又分别较自身再下降约25%。这表明在起伏明显的中小尺度下,测地距离通常可以更好地利用地形模型的精度信息。相关方法可用于提升高程插值的精度,也可为地表建模提供参考。

关键词:高精度地形模型;测地距离;表面插值;自相关矩阵正定;降维投影

中图分类号:P208 **文献标识码**:A **收稿日期**:2024-11-14

DOI:10.13203/j.whugis20240319 **文章编号**:1671-8860(2025)05-1006-11

Topographic Surface Interpolation with Geodesic Distance

DUAN Xinqiao[1,2,3]

1 School of Surveying and Geoinformation Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

2 State Key Laboratory of Resources and Environmental Information System, Beijing 100101, China

3 Key Laboratory of Mine Environmental Monitoring and Improving Around Poyang Lake, Ministry of Natural Resources, Nanchang 330013, China

Abstract: **Objectives**: The Earth's surface is a non-Euclidean curved space with topographic relief. Due to the difficulty to measure surface distances, analysis and calculations on topographic surfaces offten rely on approximate solutions, which can impede the precise application of topography models. This paper introduces the concept of exact geodesic distance mapping on undulating medium and small-scale terrain, and investigates the metric correction and accuracy evaluation of surface interpolation models. **Methods**: In view of the non-positive definite autocorrelation matrices caused by non-Euclidean metric, we propose a recalculation solution following topographic projection through dimension reduction constrained by geodesic distance, The primary interpolation algorithm is subsequently revised. On a relatively regular terrain grid with a 10-meter horizontal resolution, elevation variables minimally affected by environmental interference are selected to establish an interpolation benchmark test. The optimized model is then employed to conduct interpolation tests on 0.3-meter topographic point clouds and 0.25° ECMWF reanalysis surface air temperature, respectively, to explore the applicable scale of geodesic distance. **Results**: The findings indicate that simple inverse distance weighting and natural neighbor interpolation using geodesic distance exhibit a clear improvement in accuracy compared to those using Euclidean

基金项目:资源与环境信息系统国家重点实验室2020年度开放基金。

作者简介:段新桥,博士,主要从事数字地形分析和地统计研究。sancho@whu.edu.cn

distance. The accuracy of radial basis function and ordinary Kriging interpolation is generally superior to simple interpolation under Euclidean distance. In terms of projection geodesic distance, their root mean square error is further reduced by approximately 25% compared to themselves. **Conclusions**: This suggests that at small and medium scales with significant relief, geodesic distance can often better leverage the accuracy information of terrain models. The related methods can be utilized to enhance the accuracy of elevation interpolation and provide a reference for surface modeling.

Key words: high-precision terrain model; geodesic distance; surface interpolation; positive-definite auto-correlation matrix; projection through dimensionality reduction

地形起伏在几乎所有的时间和空间尺度上深刻地影响着地球表层环境[1-2]，国内外对地形的测绘逐渐走向实景三维的高精度，进一步精确反映真实地形的垂向尺度和表面弯曲。高精度地形模型在给水利、生态、地质灾害等众多领域应用[3-7]提供坚实空间基础的同时，却也因其表面距离不能直接量算而给空间分析带来严重挑战，包括基本空间量算挑战及依赖于距离度量的结构分析（如曲面 Voronoi 图）与建模分析挑战[8-12]。这个根本性的度量限制迫使现有的地表分析大量依靠近似计算，损害了地形模型的精度利用。

地形曲面上两点间的（最短）距离是测地距离，对应于平面上的直线欧氏距离和球面上的大圆弧距离。数字曲面上的测地距离是一个复杂的基础科学问题[13]。影像分析中较早认识到地形起伏对真实空间距离的影响，栅格的测地距离主要通过测地变换间接计算[14-15]。这种距离变换效率很高，但几何精度差[16-17]。三维地形格网上的测地距离近年来也逐渐引起重视[18-19]，但主要是基于 Dijkstra 图搜索的最短路径距离。Dijkstra 方法沿着格网边长而不跨越格网面片计算距离，本质上类似于栅格形式的粗略测地距离。

精确的测地距离在科学计算和图形学领域得到发展。微分几何的方法将曲面作为数学物理方程的计算格网，以光和热的扩散时间快速反算传播距离[20]，得到沿格网点分布的离散测地距离。由于光/热核函数是光滑的，微分近似后的曲面距离只有一阶精度。计算几何的方法将光/热源点直接可见的区域封装为窗口，计算窗口在传播面片上的解析关系得到连续、精确的测地距离[21]。但窗口以不同方向和次序相遇并裁剪，频繁的圆锥曲线裁剪严重影响算法效率。图 1 展示了这 3 种主要测地距离的计算模型，计算几何距离（直线段 BHE/折线段 BHD）、微分几何距离（弧段 $\overset{\frown}{BHD}$）和图搜索距离（折线段 BCD）数值上依次增大。因为顶点 B/D 间的测地距离是最短距离，因而需要将面片 ACD 以 AC 为轴旋转至面片 ABC 所在平面得到像 ACE，则计算几何的最短距离是直线段 BHE（对应折线段 BHD）；微分几何的最短距离需要在棱上的 H 点处光滑，因而是弧段 $\overset{\frown}{BHD}$；图搜索的最短距离是折线段 BCD。值得注意的是，由于地形表面的光滑流形结构，离散格网的测地距离可以自然地拓展到离散点云。

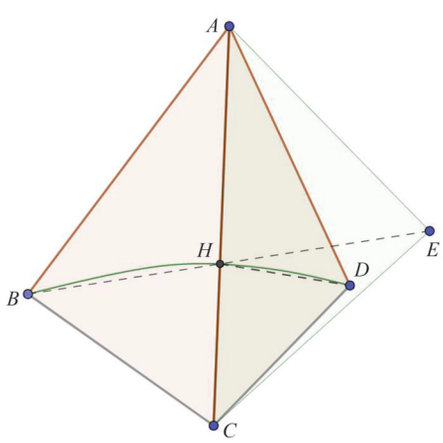


图 1　离散曲面 $ABCD$ 和顶点 B/D 间测地距离的计算模型

Fig. 1　Discrete Mesh $ABCD$ and the Computational Model of Geodesic Between Vertex B/D

本文主要研究地形格网上微分几何的测地距离的引入。由于距离度量是空间插值中相关分析与变异分析的量化基础[22-23]，本文着重关注测地距离对地表插值模型而不是基本空间量算的影响。

虽然地表环境变量对地形非常敏感，但是大尺度研究中地形的影响主要通过参数化而不是直接的距离权重得到体现[24-25]。这主要是因为大尺度研究的水平范围（数百至数千公里）远大于常规地形的垂向尺度（数公里），两者不在一个尺度。间接参数化导致地形影响因子呈现明显的不确定性[26-27]。在中小尺度的高精度地形模型上，垂向尺度不能再忽略，传统插值模型却因为非欧氏曲面距离难以直接计算而大量使用欧氏距离近似。现有的插值算法库（如著名的

GSTools和Scikit的gstat)还没有针对地形曲面与测地度量的实现。因此,需要使用测地距离来定量调查系统蕴含的偏差。事实上,在二维平面弯曲的河流扩散[28-29]、地质剖面成藏[19,30]、乃至一般性的道路、街区、网络的传输模型中[31-32],许多研究已经采用非欧氏弯曲度量提升了模型的插值精度。而在一些河口、海湾和区域风道的扩散研究中虽然也涉及到三维地形,但地形主要起平面弯曲的分界作用[33]。中小尺度地形的三维弯曲及其对环境生态、地质灾害的控制性作用[5,7,34]还缺乏基于弯曲测地距离的直接支持。

空间度量决定空间性质,非平坦空间和弯曲度量可能使得空间插值依据的自相关矩阵非正定[35]。由于自相关矩阵是一个平面的二阶矩结构,非正定的自相关矩阵会导致异常预测值。Curriero[35]在曼哈顿距离上和Ver Hoef[36]在线性网络距离上通过调整克里金插值的变程等参数,证实大多数自相关模型都可能非正定。在理想球面上,使用弦近似的测地距离指数模型和球函数模型可以是正定的[10,37]。对不规则地形曲面上测地距离的自相关矩阵及其它变异函数模型,目前还没有明确结论。

对非正定的自相关矩阵,数学上的一个直接思路是寻找距离最近(Frobenius距离)的正定阵[38]。一般做法是把矩阵特征分解,然后将对角元同时增加一个小量以排除0与负特征值[33,39]。但是地图学对非欧氏的地球椭球空间有历史悠久且成熟的投影处理经验,即在误差控制下将椭球面映射为容易分析计算的地图平面。由于平面上的自相关模型不存在非正定问题,这自然激发将地形曲面投影处理的想法。虽然地图学中没有直接用于不规则地形曲面的投影实现,然而在图形学和机器学习领域中有许多基于离散格式的等距投影降维方法[31,39]。这些方法先计算高维空间样本点之间的距离,再将样本点在距离不变约束下变形至低维空间。由于数字地形模型常以不规则三角网(triangulated irregular network,TIN)或点云形式表示,这些降维方法因而也可以用于地形曲面的投影变换。

围绕测地距离的地表插值,本文将完成以下工作:(1)在地形曲面格网上引入精确的测地距离,建立严格的度量计算;(2)以降维投影处理三维地形曲面而非二维平面的自相关矩阵正定问题[31,36];(3)以测地距离改写确定性插值与地统计插值算法;(4)在亚米、10 m和400 m级水平分辨率的中小尺度地形上进行插值实验,检验测地距离对插值模型的精度影响和适用尺度。

1 研究方法

本文在Python开源生态改写主要插值算法,可视化使用VTK/ParaView平台。

1.1 测地距离映射

计算几何的MMP(Mitchell,Mount,Papadimitrious)算法[21]和微分几何的HM(heat method)算法[40]是测地距离映射的主流实现,Python移植库(pygeodesic/potpourri3d/libigl)具备算法的主要功能。TIN格式的离散地形格网作为算法的兼容输入,一般要处理为最简二流形结构,即排除了冗余顶点、孤立顶点、悬边和悬面的单连通光滑表面。为保证算法数字稳定性,TIN格网还要去除极端邻近的点以防止病态狭长的三角形。有些算法库还需要格网面片保证一致定向。

测地距离映射与以一组源点为动态参考,根据源点不同,动态计算曲面上所有其他点至源点的最短距离。源点一般为待插值点。由于地表采样点一般不会恰好与地形格网重合,需要将其插入到TIN格网才能计算表面距离。

MMP算法将源点直接可见的区域封装为面片边上的窗口,计算直线传播的窗口在相邻面片上的几何关系逐步得到测地距离场;窗口遇到鞍点会分叉为3个,不同方向和次序的窗口反复相遇并裁剪,窗口管理是计算几何测地距离映射的关键。HM算法将地形格网看作热扩散的计算域格网,由传播时间反查Varadhan公式得到传播距离。

距离矩阵关系到自相关矩阵和后续求解的GAMMA矩阵,理论上是对称结构。MMP算法得到连续的解析精确测地距离场,使用它得到的距离矩阵可以保证对称。HM测地距离只有1阶精度,还意味着计算结果的不对称,即不同计算次序的结果存在微小的数值差异($d_{ij}\neq d_{ji}$)。为避免不必要的结构性误差,需要将HM距离矩阵处理为对称阵。

1.2 确定性插值

确定性插值主要包括反距离权重(inverse distance weight,IDW)、自然邻近(natural neighbor,NN)插值和径向基函数(radial basis function,RBF)插值。对IDW插值,将每一个待插点作为源点,计算它到格网所有顶点的距离d,而

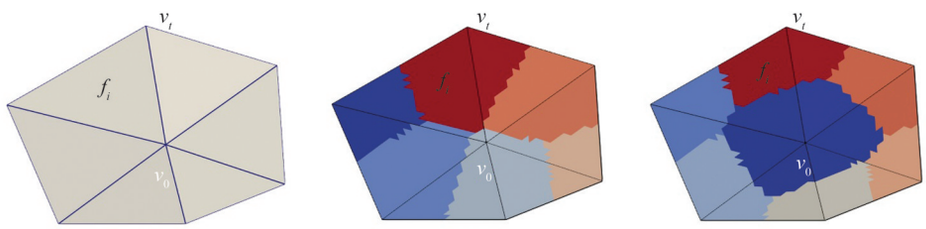
$$sts=\mathrm{argsort}(d) \tag{1}$$

返回最邻近点。取 sts 数组前 k 项，则待插值点估值是最近 k 个参考 z 值的加权和：

$$\hat{z}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(d_i)^p}z_i/\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(d_i)^p} \tag{2}$$

式中，p 是幂次；d_i 是距离。

NN 插值采用 Voronoi 图计算二维面积权重。对于离散曲面，一种直接且快速的曲面 Voronoi 图算法是栅格聚类[9,41]。NN 插值流程见图 2，取每个待插值点直接相邻的 0-ring 三角形，0-ring 三角形里的直接相邻顶点的 z 值作为参考样本；将直接相邻三角形细分（如 1 000 份），细分三角形以其中心点到源点的最近距离作两次聚类，被待插值点“偷”来的 Voronoi 单元的面片在总面积中的占比是其原属参考点的权重，如图 2(c) 中顶点 v_t 的 Voronoi 单元被 v_0 的 Voronoi 单元所“偷”取的面积，在 v_0 的 Voronoi 单元中的面积占比是其顶点的权重。



(a) 待插值点 v_0 的直接相邻面片 f_i 和顶点 v_t　(b) 待插点 v_0 不参与细分 Voronoi 图聚类　(c) v_0 参与 Voronoi 图聚类

图 2　NN 插值流程

Fig. 2　Procedure of NN Interpolation

RBF 插值假设目标空间可由形状函数张开的空间线性拟合，形状函数以样本点为中心刻画相关系数和距离的关系。计算距离矩阵 (d_{ij})，经形状函数变换后，得到自相关矩阵 (φ_{ij})。而在所有参考点上有真值 $\boldsymbol{Z}$，则解线性方程：

$$\boldsymbol{\Phi W}=\boldsymbol{Z} \tag{3}$$

就得到当前配置下各参考点的权重 w_i。待插点的估值为各参考点高程的加权和，即 $\hat{z}=\sum_{i=1}^{n}w_iz_i$。

一般来说，地形格网的顶点数远超地表插值模型常规的 1 000～2 000 个样本数，这时可以采用移动 RBF 或移动克里金插值，即 n 取待插点移动邻域的大小[42]。在 RBF 的地形插值中[43]，形状函数常选用薄板样条与多面函数。

1.3　地统计插值

普通克里金（ordinary Kriging，OK）插值不直接拟合目标曲面，它们计算所有点对距离 d_{ij} 及属性的半方差 r_{ij}：

$$r_{ij}=\frac{1}{2}E\left[\left(z_i-z_j\right)^2\right]=\sigma^2-\mathrm{Cov}\left(R_i,R_j\right) \tag{4}$$

式中，方差 σ^2 是块金效应。拟合依距离变化的半方差点云得到变异模型，如指数模型：

$$\rho_e\left(d_{ij}\right)=\exp\left(-d_{ij}/\alpha\right) \tag{5}$$

式中，距离缩放因子 α（变程）是自相关函数的作用范围。均值平稳和内蕴平稳假设

$$E\left[z\left(x,y\right)\right]=c,\mathrm{Var}\left[z\left(x,y\right)\right]=\sigma^2 \tag{6}$$

为常值，也即随机变量 z 可写为：

$$z\left(x,y\right)=E\left[z\left(x,y\right)\right]+R\left(x,y\right)=c+R\left(x,y\right) \tag{7}$$

式中，$R\left(x,y\right)$ 是随机误差。在无偏约束下（即 $E(\hat{z}-z)=0$，而 $\hat{z}=\sum_{i=1}^{n}w_iz_i$，因而 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$），使用拉格朗日乘数法让方差最小，则有：

$$\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1n}&1\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2n}&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\r_{n1}&r_{n2}&\cdots&r_{nn}&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\\-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{10}\\r_{20}\\\vdots\\r_{n0}\\1\end{bmatrix} \tag{8}$$

式中，λ 是拉格朗日乘数。求解得到各参考点的权重系数 w_i 和待插值点的加权和。

记半方差矩阵为 $\boldsymbol{R}$，自相关矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可写为：

$$\boldsymbol{C}=\sigma^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R} \tag{9}$$

OK 插值相比 RBF 插值需要满足的约束条件更多。除了上述的均值平稳、二阶平稳和无偏约束，还需要考虑去趋势与正态调整、封箱函数与封箱数目、变异函数优选等，具体参数设定及代码实现遵循传统做法。

1.4　最近正定和降维投影

自相关矩阵是二阶矩，需要满足正定要求。对非正定阵，数学上可以求得平方距离最近的正定阵（nearest positive definite，NPD）。相关方法参照 R、scipy 和 Matlab 中的实现。

机器学习领域中主流的降维投影[31,36]有等距映射（isometric mapping，ISOMAP）、多维尺度（multi-dimensional scaling，MDS）变换和 t 分布随

机邻近嵌入(*t*-distributed stochastic neighbor embedding,*t*-SNE)等。降维投影方法的实现可以使用sklearn/TensorFlow包中提供的功能。对空间数据,主要采用ISOMAP和MDS以尽量保证空间距离不变。

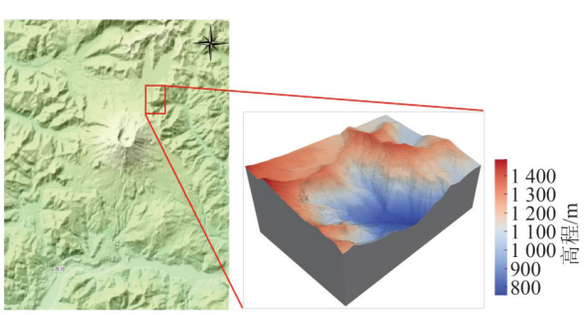
与机器学习中的高维数据不同,本文地形曲面降维处理中ISOMAP/MDS算法的输入是测地距离矩阵,算法输出等距变形的二维坐标。在变形中需要将抽样点同邻域参考点一起计算以保证一致变换。在空间关系保持不变的投影平面上,可以安全地使用欧氏距离以保证自相关矩阵正定。

2 实验与讨论

先在一个顶点分布相对规则的小尺度地形曲面上,以高程插值详细检查测地距离在不同模型中的表现,然后将优选模型外推至更细和更粗分辨率的地形表面,以检验测地距离的尺度适用性。

2.1 高程插值基准实验

地表高程通常较少受地表环境变量干扰,适合于建立插值基准实验。小尺度地形选用美国地质勘探局3DEP项目公开的10 m水平分辨率St. Helens火山地形数据。实验区域位于美国西北部的哥伦比亚高原,高程变化范围为751~1 489 m(图3)。地形格网特意避开了顶点分布的密度不均匀(图4),目的是让简单插值与统计插值在相对公平的条件下进行对比;地形格网处理后有8 800个顶点以及17 222个三角面片。

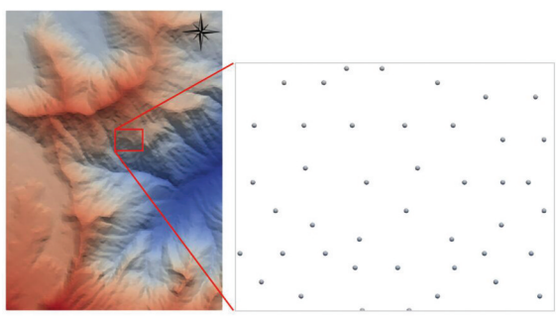


(a) 实验区位于美国华盛顿州圣海伦火山附近 (b) 地形高程渲染与三维模型

图3 基准实验区域位置及实验地形模型

Fig. 3 Location of the Benchmark Experiment Area and the Terrain Model

多次随机选取一组顶点(100个),先后进行确定性与地统计的插值。对每一种方法,分别实验三维欧氏距离和测地距离的插值。精确的MMP测地距离只在计算量小的反距离权重插值中使用,其他插值都是使用HM测地距离。主要方法的均方误差(mean squared error,MSE)、均方根误差(root mean square error,RMSE)和平均绝对误差(mean absolute error,MAE)统计结果如表1所示。图5展示了在同一组样本上调节IDW插值的幂次的结果。



(a) 实验区地形 (b) 顶点局部放大图

图4 基准实验区地形格网顶点的"规则"分布

Fig. 4 Relative Regular Distribution of the Benchmark Experimental Topographic Grid Vertices

2.2 地形点云重采样

激光雷达(light detection and ranging,LiDAR)地形点云由于成像机制等原因,密度分布非常不均匀,并含有大大小小的缺失,高程插值经常被用来填补空白或重采样以生产规则地形格网[44-45]。实验数据选用3DEP项目在新墨西哥州Santafe地区的LiDAR地形点云(图6(a)红框区域)。地形点云经过滤非地面点、去除离群点及极端邻近点后有146 259个点,最小水平间距约0.31 m(图6)。

在3DEP项目网站上同时有多种规格的数字高程模型(digital elevation model,DEM)影像以供使用。这里使用与点云分辨率最接近的1 m DEM来检查插值算法的性能。将DEM影像投影至LiDAR点云的坐标系(EPSG:6342)并裁剪,得到含有高程的规则格网点和插值DEM点云。DEM点云含有71 289个点,约为LiDAR点云数量的一半。投影过程仅改变DEM栅格的xy坐标,不对高程插值。

将LiDAR点云与DEM点云叠置,局部如图7所示,使用LiDAR点云对这些DEM点云进行插值。插值算法使用基准实验中表现良好的RBF。作为对比,着重比较了生产中经常使用的NN插值;由于测地距离的NN与欧氏距离的NN差别不大,这里仅对比了欧氏距离的NN插值。

插值点云与原始点云的接近程度或距离是常用的精度评价手段[46]。常见的距离度量有M3C2/

表 1　测地距离的高程插值交叉验证/m

Table 1　Cross-Validation of the Elevation Interpolation with Geodesic Metric/m

序号	插值方法	MSE	RMSE	MAE
1	IDW Euclidean	11.92	3.45	2.80
2	IDW geodesic exact	10.24	3.20	2.53
3	IDW geodesic heat	9.06	3.01	2.32
4	NN Euclidean	7.77	2.79	2.13
5	NN geodesic	7.49	2.74	2.08
6	RBF multiquadric Euclidean	6.16	2.48	1.87
7	RBF multiquadric MDS	3.37	1.84	1.43
8	RBF multiquadric ISOMAP	7.57	2.75	2.05
9	RBF thin-plate Euclidean	4.94	2.22	1.73
10	RBF thin-plate MDS	3.10	1.76	1.37
11	Krige exponential Euclidean	6.74	2.60	2.00
12	Krige exponential geodesic	477 946.64	691.34	122.54
13	Krige exponential MDS	4.05	2.01	1.59
14	Krige spherical Euclidean	6.42	2.53	1.95
15	Krige spherical geodesic	147 116.91	383.56	111.39
16	Krige spherical MDS	4.45	2.11	1.64
17	Krige pentaspherical Euclidean	6.29	2.51	1.92
18	Krige pentaspherical geodesic	1 583 339.72	1 258.31	219.69
19	Krige pentaspherical NPD	48 271.86	219.71	97.46
20	Krige pentaspherical ISOMAP	7.69	2.77	2.07
21	Krige pentaspherical MDS	4.01	2.00	1.58

注：Euclidean：欧氏距离；geodesic：测地距离；exact：采用计算几何 MMP 算法的精确测地距离；heat：采用微分几何 HM 算法的测地距离；multiquadric：多面函数；thin-plate：薄板样条函数；exponential：指数函数；spherical：球函数；pentaspherical：五角球函数；绿色行是最优记录，红色行是异常预测。

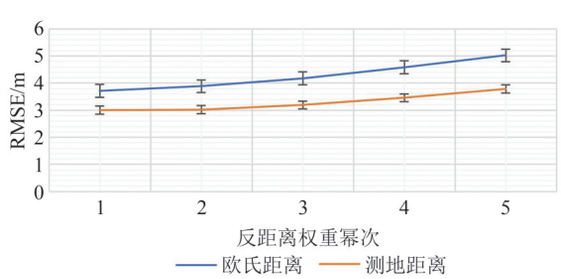
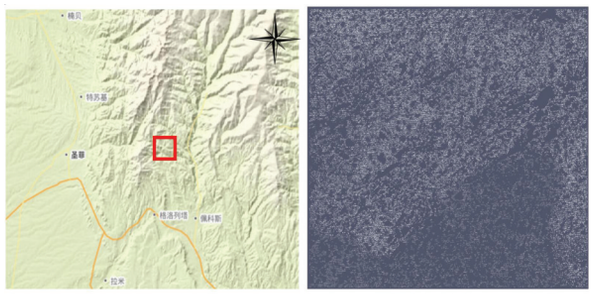


图 5　IDW 插值的 RMSE 与距离幂次增加而变大

Fig. 5　RMSE of IDW Interpolation Increase with the Inverse Distance Power

Chamfer/Haussdorf/EMD（Earth-mover distance）等[47-48]，它们统计插值点云与原始点云的距离，或插值点云与原始点云拟合表面的距离。



(a) 实验区地形　　(b) 点云密度的不均匀分布

图 6　实验区地形

Fig. 6　Topographic Map of the Experimental Area

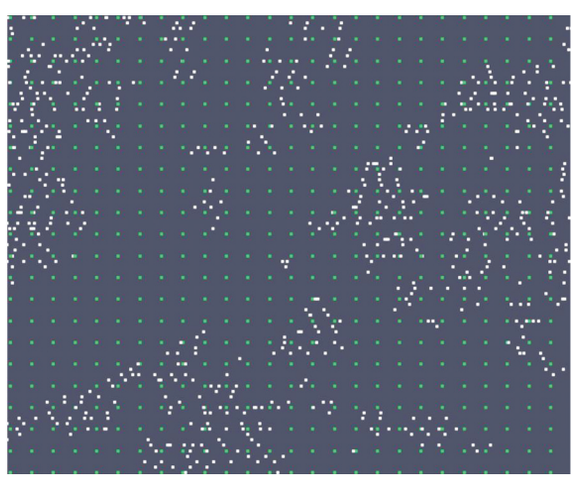


图 7　LiDAR 点云插值示意图(实验将以 LiDAR 点云(白色点)对规则的 DEM 点云(绿色点)进行插值)

Fig. 7　Schematic Diagram of LiDAR Point Cloud Interpolation(The Regular DEM Points (in Green) Will Be Interpolated with the LiDAR Points (in White))

距离统计主要基于单个点至比较点云的最近欧氏距离。这种非精确配对的距离在原始点云密度不均匀情况下容易导致距离度量的不对称，并使 IDW/NN 简单插值的局部优势累积。实践中通常会采用综合插值策略。这里对 1 m 以内有参考点的 DEM 点云使用 NN 插值，对 1 m 以内没有参考点的 DEM 点云使用 RBF 插值。距离则同时计算了单向与双向距离，EMD 距离由于点云规模限制没能计算。结果如表 2 所示。

2.3　科罗拉多州地表气温插值

地表高程可以认为是独立变量，地表距离是高程插值的主要影响因子。地表环境变量交互复杂，真实的地表空间距离对插值的影响需要检验。这里选择起伏明显的中尺度地形和地表气温进行实验。地面气象站和地球系统的再分析数据通常非常稀疏，气温插值对应着生产精细分辨率数据的实际需求。

科罗拉多州位于美国西部，属温带大陆性气

表2 DEM点云与原始点云的距离比较

Table 2 Distance Comparison Between DEM Point Cloud and LiDAR Point Cloud

插值方法	Haussdorf距离/m	平均距离/m	平均距离CC/m	倒角距离/m^2
1 m DEM	7.681 6	0.653 1	0.443 9	1.003 3
测地距离的RBF	7.578 1	0.568 9	0.328 7	0.853 9
欧氏距离的RBF	7.880 5	0.589 1	0.337 6	0.884 3
自然邻近插值	8.008 0	0.585 8	0.340 0	0.871 8

注:3DEP的1 m DEM起插值参考作用;测地距离的RBF综合了NN插值的混合策略;Haussdorf距离是最大的单向最小距离;平均距离是单向最小距离的平均;平均距离CC是CloudCompare中插值点云至拟合的二次曲面距离;倒角距离是双向最小平方距离的加和。

候。西部是丘陵地形,东部是高原地形,是美国地势最高的一个州(图8)。DEM选用美国NED(national elevation dataset)30 m分辨率影像。更高分辨率下格网数量呈倍数增加,测地距离计算困难。

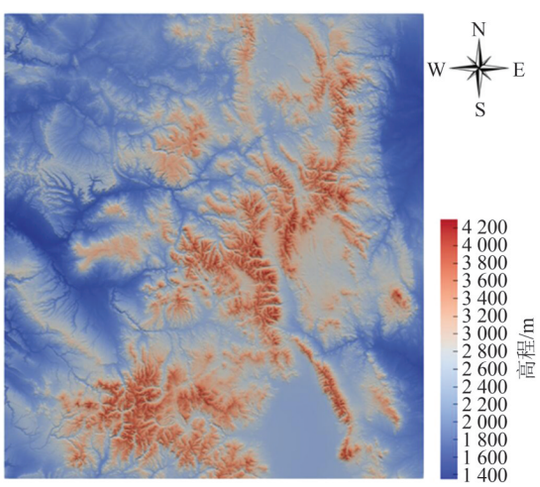


图8 科罗拉多州地形

Fig. 8 Topography of Colorado State, USA

按气温插值常规对DEM影像进行Albers等积投影(EPSG:3083),高程代入后得到离散地形格网。投影并裁剪后的30 m分辨率地形格网含有767 936个顶点,格网水平间距约433 m;高程从1 342.26 m变化到4 298.46 m,覆盖面积14 381 859.97 ha。投影过程不对高程插值。

地表气温数据选用0.25°的ERA地面2 m日平均气温,等积投影后格网水平间距约8 540 m(图9);从每个格网点引垂线与地形格网求交点,将交点插入到地形格网以便计算曲面距离。投影不对温度插值。

由图8的地形及图9的散点图可见,科罗拉多州气温分布存在着自东北角至西南角偏低的趋势,因此需要减去趋势在残差上进行插值。选取1/4格网点作交叉验证,结果如表3所示。

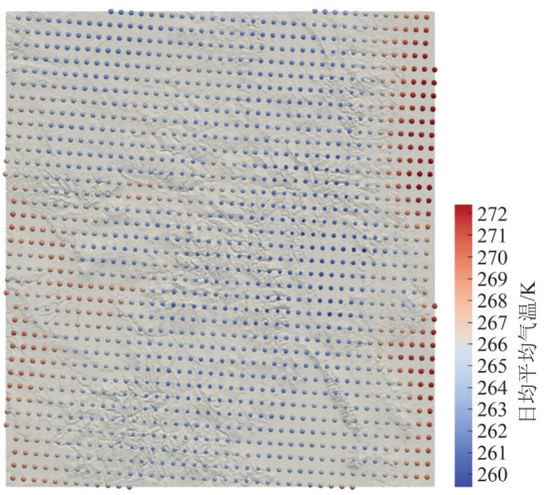


图9 科罗拉多州2021年1月0.25° ERA再分析数据的地面2 m日平均气温散点图,底图是地形格网

Fig. 9 The 2 m Air Temperature of Colorado State in 0.25° EAR, Jan 2021, Base Map Is the Topographic Grid

表3 科罗拉多州0.25° ERA地面2 m气温插值交叉验证/K

Table 3 Cross-Validation of the 2 m Air Temperature of Colorado State in 0.25° ERA/K

序号	插值方法	MSE	RMSE	MAE
1	IDW Euclidean	0.130 9	0.361 8	0.267 5
2	IDW geodesic heat	0.122 9	0.350 6	0.265 3
3	NN Euclidean	0.172 0	0.414 7	0.303 4
4	NN geodesic	0.172 6	0.415 4	0.303 7
5	RBF multiquadric Euclidean	0.064 6	0.254 1	0.190 0
6	RBF multiquadric MDS	0.029 9	0.173 1	0.128 9
7	RBF thin-plate Euclidean	0.078 7	0.280 6	0.213 2
8	RBF thin-plate MDS	0.045 1	0.212 5	0.157 0
9	Krige spherical Euclidean	0.107 5	0.327 9	0.245 7
10	Krige spherical MDS	0.111 5	0.334 0	0.250 1
11	Krige pentaspherical Euclidean	0.102 4	0.320 0	0.240 8
12	Krige pentaspherical MDS	0.099 1	0.314 9	0.237 8

注:绿色行是最优结果。

2.4 讨论

由表1可见,测地距离的RBF在高程插值基准实验中表现优秀,其RMSE较常用的欧氏距离的IDW显著降低了约49%。由表2可见,综合了NN插值的测地距离RBF(绿色列)在地形点云插值中表现出了较为明显的优势。由表3可见,测地距离在中尺度地表气温插值中都较欧氏距离表现要优,且测地距离的RBF表现最佳(第5条记录)。

2.4.1　距离衰减律

在高程插值的基准实验中,从表1中可以看到使用精确MMP测地距离和1阶HM测地距离,IDW的RMSE与使用欧氏距离相比分别提升0.25 m和0.44 m;测地距离的NN插值精度较欧氏距离虽然提升不多,但在实验中都能观察到正的提升。测地距离是贴近地形曲面的最短距离,数值上比直线欧氏距离要大,而1阶精度的光滑HM距离又比解析精度的MMP距离要大(见图1),因而表1第1~3条记录的误差渐次变好与背后的距离增加是一致的。

NN方法使用待插点直接相邻(0-ring)的面片和顶点进行插值。注意到直接相邻面片集通常不处于同一平面,那么使用欧氏直线距离和使用弯曲测地距离的Voronoi图存在精度差别(见图2)。但因为直接相邻面片涉及的区域很小,这种Voronoi图面积的差异表现为插值结果的细小差别(见表1第4、5条记录)。

空间相关性一般随着距离增加而减小。IDW插值的主要问题是仅使用有限范围的邻近点信息,如果增加距离权重的幂次以强调邻近点,忽略远端参考点的弊病通常会反映为误差增大。如图5所示,本文IDW插值的RMSE随着幂次增加而变大,但测地距离的误差始终小于同幂次的欧氏距离,这和表1第1~3条记录的距离增加而误差变小的表现是一致的。

在确定性插值中,观察到同幂次的IDW插值结果随着真实空间距离增加而变好(第1~3条记录),也观察到NN插值的二维面积权重结果比IDW的一维距离权重结果要好(表1第4、5条对第1~3条记录),但二维面积权重插值趋好的程度在收窄(表1第5条对第4条记录)。距离衰减律表明增大距离以提升精度收益存在上限。

作为地理学第一定律的直接量化应用,IDW插值是非常有活力的经典插值方法。一般认为,简单调整幂次使模型与观测最佳吻合缺乏严格依据[49](即幂次参数只是被训练为模型期望的结果,而观测样本和模型不一定准确反映空间结构)。近年来,许多研究结合空间异质结构、空间方向性、地形梯度等调整幂次,取得了良好的插值结果[50-53]。测地距离实质上是从距离自身对这个基础GIS工具进行了调整。

2.4.2　自相关模型的正定化

RBF把待插值属性当作第3维,拟合出总体误差最小的光滑曲面,所以即使不使用测地距离,多面函数和薄板样条都给出了较简单插值结果为优的整体结果(表1第6、9条对第1~5条记录)。在这个基础上,猜测使用测地距离能够继续提升插值精度。但直接使用测地距离会因自相关矩阵奇异而求解失败;使用MDS降维后,观察到RMSE均有0.5 m(~25%)左右的减小(表1第7条对第6条、第10条对第9条记录),但使用ISOMAP却反倒使精度恶化(表1第8条对第6、9条记录),这可能是ISOMAP的渐进距离保持策略不如MDS方法。

表1中,OK的指数模型、球函数模型和五角球函数模型在欧氏距离下都较确定性插值要优(第11、14、17条对第1~5条记录);在测地距离下,非平坦空间导致3个模型都出现异常预测值(第12、15、18条记录),特征分解表明自相关矩阵都出现了非正定;MDS降维后,发现RMSE较欧氏距离下分别有0.6 m、0.4 m、0.5 m(~24%)的提升(第13条对第11条、第16条对第14条、第21条对第17条记录)。鉴于五角球函数模型在空间插值中表现良好,对其测地距离自相关矩阵分别使用ISOMAP降维和NPD方法进行正定处理,发现ISOMAP降维效果依然不如MDS(第20条对第21条记录),而NPD正定甚至没能阻止异常预测出现(第19条记录)。

RBF自相关模型的非正定、普通克里金方法在理想球面能够正定的指数模型与球函数模型在不规则地形曲面上都出现非正定,说明三维地形曲面自相关模型的非正定更为普通。相比二维平面上的非欧氏弯曲,如河流/道路和网络模型,样本点之间的影响是有限的网络距离,但三维地形曲面上样本点之间是连续的弯曲距离,这可能是后者自相关模型的非正定更为复杂的原因。

2.4.3　相对垂向尺度

在基准高程插值和点云重采样中,观察到测地距离释放出明确的精度提升信号。在地表气温插值中,虽然测地距离整体较欧氏距离表现要优,但同高程插值相比也出现了一些不同(表3中IDW插值的第1、2条记录优于NN插值的第3、4条记录),这表明了地表变量变化的复杂性。值得注意的是,这个实验的基础地形格网具有较粗的分辨率(433 m),本身也蕴含着较大的不确定性。

从空间尺度来看,地表气温插值格网的水平间距8.5 km与地形的垂向高差3 km处于同一尺度。在更大尺度的空间插值中,或者空间分布的

垂向尺度与水平尺度相差一个以上数量级,则仅靠引入测地距离并不能从数值上对自相关性模型和插值模型产生显著影响。在中小尺度,地形通常具备显著的相对垂向尺度,测地距离量化的空间相关性具有重要影响。在其他尺度或非几何因子占主导地位时,测地距离的影响和地形控制因子需要仔细分辨。

3 结 语

基于离散采样的地形测绘近年来稳步走向越来越高的精度和可信度,但是高精度地形模型并不提供曲面距离量算的基本功能。以空间统计和空间插值而言,空间距离是相关分析和变异分析的基础,在弯曲地表空间使用平直的欧氏距离损害了地形模型的利用精度。

本文在地形格网上引入严格的测地距离映射以解决基本的度量计算问题,借鉴地图投影的经验成功处理非欧氏测地距离自相关矩阵的非正定问题,在地表插值中发现测地距离能够稳定地提升插值精度。特别地,在高程插值的基准实验中,最好的测地距离的RBF插值较传统欧氏距离的确定性插值,其RMSE降低高达49%(约1.7 m)。

地形不仅是地球表层环境的一个重要控制变量,更因为它在时间尺度上相对稳定,从而构成其他环境变量的空间参考基准。在更广泛的地表插值中检验内蕴的测地距离的应用,分析探讨地表过程中地形控制因子的不确定性,是下一步值得深入研究的问题。本文的核心算法及支持本文发现的数据在社区开源(https://github.com/sanchopanza72/gvd_topographic)。

参 考 文 献

[1] 汤国安.“数字地形分析”专栏导言[J].地球信息科学学报,2020,22(3):337.
TANG Guoan. Introduction to the Column “Digital Terrain Analysis”[J]. *Journal of Geo-Information Science*, 2020, 22(3): 337.

[2] WILSON J P, GALLANT J C. Digital Terrain Analysis in Terrain Analysis: Principles and Applications[M]. New York: Wiley, 2000.

[3] BATES P D. Integrating Remote Sensing Data with Flood Inundation Models: How Far Have We Got?[J]. *Hydrological Processes*, 2012, 26(16): 2515-2521.

[4] CAMPBELL M J, EASTBURN J F, DENNISON P E, et al. Evaluating the Performance of Airborne and Spaceborne Lidar for Mapping Biomass in the United States' Largest Dry Woodland Ecosystem[J]. *Remote Sensing of Environment*, 2024, 308: 114196.

[5] SCHUMANN G J P. Fight Floods on a Global Scale[J]. *Nature*, 2014, 507: 169.

[6] HAN L, DUAN P, LIU J J, et al. Research on Landslide Trace Recognition by Fusing UAV-Based LiDAR DEM Multi-feature Information[J]. *Remote Sensing*, 2023, 15(19): 4755.

[7] THOMAS I A, JORDAN P, SHINE O, et al. Defining Optimal DEM Resolutions and Point Densities for Modelling Hydrologically Sensitive Areas in Agricultural Catchments Dominated by Microtopography[J]. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 2017, 54: 38-52.

[8] 段新桥,葛咏,张彤,等.离散地形曲面上的精确Voronoi图直接生成算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(5):799-806.
DUAN Xinqiao, GE Yong, ZHANG Tong, et al. Direct Algorithm for the Exact Voronoi Diagram on Discrete Topographic Space[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(5): 799-806.

[9] 胡鹏,范青松,胡海.椭球上的测地变换和Voronoi图的生成:地理空间度量[J].武汉大学学报(信息科学版),2007,32(9):825-828.
HU Peng, FAN Qingsong, HU Hai. Distance Transformation and Voronoi Generation on Earth Ellipsoid: Metrics of Geographic Space[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(9): 825-828.

[10] BANERJEE S. On Geodetic Distance Computations in Spatial Modeling[J]. *Biometrics*, 2005, 61(2): 617-625.

[11] LI X, BAN B R, YANG Y, et al. Localization of Networks on 3D Terrain Surfaces[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2022, 21(5): 1710-1722.

[12] FIBÆK C S, LAUFER H, KEßLER C, et al. Geodata-Driven Approaches to Financial Inclusion - Addressing the Challenge of Proximity[J]. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 2021, 99: 102325.

[13] KIMMEL R, SETHIAN J A. Computing Geodesic Paths on Manifolds[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1998, 95(15): 8431-8435.

[14] LI Y, YONG B, Van OOSTEROM P, et al. Air-

borne LiDAR Data Filtering Based on Geodesic Transformations of Mathematical Morphology [J]. *Remote Sensing*, 2017, 9(11): 1104.

[15] SOILLE P. Morphological Image Analysis: Principles and Applications[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2003.

[16] SETHIAN J A. Fast Marching Methods[J]. *SIAM Review*, 1999, 41(2): 199-235.

[17] WANG G T, ZULUAGA M A, LI W Q, et al. DeepIGeoS: A Deep Interactive Geodesic Framework for Medical Image Segmentation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2019, 41(7): 1559-1572.

[18] HOU W G, ZHANG X M, LI X, et al. Poisson Disk Sampling in Geodesic Metric for DEM Simplification [J]. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 2013, 23: 264-272.

[19] BOISVERT J B, DEUTSCH C V. Programs for Kriging and Sequential Gaussian Simulation with Locally Varying Anisotropy Using Non-Euclidean Distances[J]. *Computers & Geosciences*, 2011, 37(4): 495-510.

[20] CRANE K, WEISCHEDEL C, WARDETZKY M. Geodesics in Heat: A New Approach to Computing Distance Based on Heat Flow [J]. *ACM Trans Graph*, 2013,32(5): 152.

[21] SURAZHSKY V, SURAZHSKY T, KIRSANOV D, et al. Fast Exact and Approximate Geodesics on Meshes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2005, 24(3): 553-560.

[22] 卢宾宾, 葛咏,秦昆,等. 地理加权建模理论与技术框架[J]. 遥感学报, 2024, DOI: 10.11834/jrs.20244064.
LU Binbin, GE Yong, QIN Kun, et al. Theoretical and Technical Framework of Geographically Weighed Models [J]. *National Remote Sensing Bulletin*, 2024, DOI:10.11834/jrs.20244064.

[23] DU Z H, WANG Z Y, WU S S, et al. Geographically Neural Network Weighted Regression for the Accurate Estimation of Spatial Non-Stationarity[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2020, 34(7): 1353-1377.

[24] QIN R Z,ZHAO Z Y,XU J,et al. HRLT: A High-Resolution (1 d, 1 km) and Long-Term (1961—2019) Gridded Dataset for Surface Temperature and Precipitation Across China [J]. *Earth System Science Data*, 2022, 14(11): 4793-4810.

[25] XU C D, WANG J F, LI Q X. A New Method for Temperature Spatial Interpolation Based on Sparse Historical Stations[J]. *Journal of Climate*, 2018, 31(5): 1757-1770.

[26] ELVIDGE A D, SANDU I, WEDI N, et al. Uncertainty in the Representation of Orography in Weather and Climate Models and Implications for Parameterized Drag [J]. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 2019, 11(8): 2567-2585.

[27] WANG L G, WANG K C. Impacts of DEM Uncertainty on Estimated Surface Solar Radiation and Extracted River Network[J]. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 2015, 96(2): 297-304.

[28] PETERSON E E, THEOBALD D M. Geostatistical Modelling on Stream Networks: Developing Valid Covariance Matrices Based on Hydrologic Distance and Stream Flow [J]. *Freshwater Biology*, 2007, 52(2): 267-279.

[29] LYON S W, SEIBERT J, LEMBO A J, et al. Incorporating Landscape Characteristics in a Distance Metric for Interpolating Between Observations of Stream Water Chemistry[J]. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2008, 12(94): 1229-1239.

[30] HILLIER M J, SCHETSELAAR E M, de KEMP E A, et al. Three-Dimensional Modelling of Geological Surfaces Using Generalized Interpolation with Radial Basis Functions[J]. *Mathematical Geosciences*, 2014, 46(8): 931-953.

[31] 邹海翔, 乐阳, 李清泉. 城市路网交通状态的改进Kriging估计方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(1): 101-104.
ZOU Haixiang, YUE Yang, LI Qingquan. Kriging Based on Approxiate Road Network Distance for Urban Traffic State Estimation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan Univeristy*, 2012, 37(1): 101-104.

[32] DIAS F S, BETANCOURT M, RODRÍGUEZ-GONZÁLEZ P M, et al. Analysing the Distance Decay of Community Similarity in River Networks Using Bayesian Methods [J]. *Scientific Reports*, 2021, 11: 21660.

[33] DAVIS B J K, CURRIERO F C. Development and Evaluation of Geostatistical Methods for Non-Euclidean-Based Spatial Covariance Matrices [J]. *Mathematical Geosciences*, 2019, 51(6): 767-791.

[34] ROTACH M W, STIPERSKI I, FUHRER O, et al. Investigating Exchange Processes over Complex Topography: The Innsbruck Box (I-Box)[J]. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 2017, 98(4): 787-805.

[35] CURRIERO F C. On the Use of Non-Euclidean Distance Measures in Geostatistics[J]. *Mathematical Geology*, 2006, 38(8): 907-926.

[36] Ver HOEF J M. Kriging Models for Linear Net-

works and Non-Euclidean Distances: Cautions and Solutions[J]. *Methods in Ecology and Evolution*, 2018, 9(6): 1600-1613.

[37] GNEITING T. Strictly and Non-Strictly Positive Definite Functions on Spheres[J]. *Bernoulli*, 2013, 19(4): .

[38] HIGHAM N J. Computing a Nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1988, 103: 103-118.

[39] COSENTINO N J, OPAZO N E, LAMBERT F, et al. Global-Krigger: A Global Kriging Interpolation Toolbox with Paleoclimatology Examples[J]. *Geochemistry*, Geophysics, Geosystems, 2023, 24(6): e2022GC010821.

[40] Sharp N, Soliman Y, Crane K. The Vector Heat Method[J]. *ACM Trans on Graph*, 2019, 38(3): 24.1-24.19.

[41] CHEN J. A Raster-Based Method for Computing Voronoi Diagrams of Spatial Objects Using Dynamic Distance Transformation[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 1999, 13(3): 209-225.

[42] Wendland H. Computational Aspects of Radial Basis Function Approximation, in Studies in Computational Mathematics[M]. Jetter K, ed. Amsterdam: Elsevier, 2006: 231-256.

[43] 高原, 朱娅男, 陈传法, 等. 高精度DEM建模的加权径向基函数插值方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(8): 1373-1379.
GAO Yuan, ZHU Ya'nan, CHEN Chuanfa, et al. A Weighted Radial Basis Function Interpolation Method for High Accuracy DEM Modeling[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(8): 1373-1379.

[44] ZHU D, CHENG X M, ZHANG F, et al. Spatial Interpolation Using Conditional Generative Adversarial Neural Networks[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2020, 34(4): 735-758.

[45] LI S J, HU G H, CHENG X H, et al. Integrating Topographic Knowledge into Deep Learning for the Void-Filling of Digital Elevation Models[J]. *Remote Sensing of Environment*, 2022, 269: 112818.

[46] LAGUE D, BRODU N, LEROUX J. Accurate 3D Comparison of Complex Topography with Terrestrial Laser Scanner: Application to the Rangitikei Canyon (N-Z)[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2013. 82: 10-26.

[47] Wu T, PAN L, ZHANG J Z, et al. Density-Aware Chamfer Distance as a Comprehensive Metric for Point Cloud Completion[C]//The 35th International Conference on Neural Information Processing Systems, New York, USA, 2021.

[48] FAN H Q, SU H, GUIBAS L. A Point Set Generation Network for 3D Object Reconstruction from a Single Image[C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Honolulu, HI, USA, 2017.

[49] 王劲峰, 姜成晟, 李连发, 等. 空间抽样与统计推断[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
WANG Jinfeng, JIANG Chengsheng, LI Lianfa, et al. Spatial Sampling and Statistical Inference[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[50] 樊子德, 李佳霖, 邓敏. 顾及多因素影响的自适应反距离加权插值方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(6): 842-847.
FAN Zide, LI Jialin, DENG Min. An Adaptive Inverse-Distance Weighting Spatial Interpolation Method with the Consideration of Multiple Factors[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(6): 842-847.

[51] LI Z L. An Enhanced Dual IDW Method for High-Quality Geospatial Interpolation[J]. *Scientific Reports*, 2021, 11(1): 9903.

[52] 封志明, 杨艳昭, 丁晓强, 等. 气象要素空间插值方法优化[J]. 地理研究, 2004, 23(3): 357-364.
FENG Zhiming, YANG Yanzhao, DING Xiaoqiang, et al. Optimization of the Spatial Interpolation Methods for Climate Resources[J]. *Geographical Research*, 2004, 23(3): 357-364.

[53] 李正泉, 吴尧祥. 顾及方向遮蔽性的反距离权重插值法[J]. 测绘学报, 2015, 44(1): 91-98.
LI Zhengquan, WU Yaoxiang. Inverse Distance Weighted Interpolation Involving Position Shading[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2015, 44(1): 91-98.